§1. 4 矩阵的转置

从一个给定的 m× n 阶矩阵 A,我们可以得到另一个 n× m 阶矩阵 B,其中 B 的列是 A 的

行.

定义 1. 4. 1 一个 m × n 阶矩阵  的转置矩阵是一个 n× m 阶矩阵 ,它的元素 定义为

= .

矩阵 A 的转置矩阵记为 .

例 1 如果 ,则 如果,则如果,则 ,

对 有

定理 1 . 4 . 1 矩阵的转置具有下列性质:

1 . .

2 . 

3 . 

4 . 

由转置运算,可定义一些重要的矩阵.

定义 1 . 4 . 2 如果一个 n 阶方阵 A 满足 则称 A 为对称矩阵. 如果一个 n 阶方阵 A 满足 ,则称 A 为反对称矩阵. 如果一个 n 阶方阵 A 满足 则称 A 为正交矩阵. 从定义 1. 4. 2,一个对称矩阵一定满足.一个反对称矩阵满足 其主对角 线上的元素因 ,因此 = 0.

例如:

,

,

都是对称矩阵;

是反对称矩阵.

因此在直观上对称矩阵是元素关于主对角线呈对称特点的矩阵.反对称矩阵是关于主对角 线上下两个三角形对称位置上元素符号相反的矩阵.

练习 1 . 4

1. 设 A 为 n 阶方阵,令

 , 

证明: B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵. 2. 证明任何一个图的连接矩阵都是对称矩阵. 3. 设 A 为 m× n 阶矩阵,验证由 A 构成的两个矩阵:  和  都是对称矩阵.

§1. 5 矩 阵 的 逆

我们知道一个非零的数 a,存在一个数 ,使 ab= 1. b 为 a 的倒数,可记  .

这一点对于解一元方程 ax = b 是很重要的.实际上大家熟悉的求解过程是:



我们也希望矩阵方程 AX = b 能这样求解.把数的倒数推广到矩阵上,那就是要找一个矩阵 B,使 .而矩阵乘法不可交换,我们不得不要求  , 这就是矩阵逆的概念. 定义 1 . 5 . 1 一个 n× n 阶方阵 A,如果存在一个 n 阶方阵 B,使 , (1 . 5 . 1) 则称矩阵 A 为可逆矩阵,或者非奇异矩阵. B 称为 A 的逆矩阵. 如果 A 有两个逆矩阵 B 和 C,则由(1 . 5 . 1)式,有 , 这说明 A 的逆是惟一的.用记号表示 A 的逆矩阵. 例 1 验证矩阵

是

的逆矩阵.

解 因为

 又

,

所以由定义 1.5 . 1

，.

这个例子说明一个可逆矩阵 A 和它的逆矩阵  是互为逆矩阵的,也就是当 A 为可逆矩阵时,在矩阵方程 AX = B 两边左乘  ,就会有  即求出了 X.但可惜的是,很多矩阵都不可逆.首先,任何不是 方阵的 m× n 阶矩阵( m≠ n)均不可逆,即使是方阵,也不一定都可逆.

例 2 证明矩阵 不可逆.

02 第一章 矩 阵

证 设 ,

则

因此对任意二阶方阵 B, BA 不可能为单位矩阵 ,故 A 不可逆. 逆矩阵有如下性质: 定理 1 . 5 . 1 设 n 阶方阵 A 和 B 均为可逆矩阵, k 为一个非零的数,则 , kA 和 AB 均可 逆,而且有

1 . 

2 

3 

4 

证 只证(2)作为例子. 因为 A 和 B 均为可逆矩阵,从而存在矩阵  和  ,又   所以由定义,  . 值得指出来的是,当 A 和 B 均为可逆矩阵时, A + B 则不一定为可逆矩阵. 例如:

和 均为可逆矩阵,但 是不可逆矩阵.

当一个矩阵阶数比较高时,它的逆矩阵不易直接看出,是否可逆也不能靠直观判断.对于这 些问题将在引入更多的矩阵运算工具后,在后面部分给出.

练习 1 . 5

1. 试给出对角矩阵 的逆矩阵.

2. 设 A、B 均为 n 阶不可逆矩阵,则 A + B 一定也不可逆吗 ?

3. 设 ,则可以找到矩阵

,使 能否说 A 是可逆矩阵 ?